Подходы к решению задач распределения ограниченных потоков ресурсов

О. А. Коновалов, email: Oleg-070707@yandex.ru [1]
С. Р. Каберов, email: sanek11.91@inbox.ru [1]
В. С. Никитин, email: Nikvs@yandex.ru [1]
А. П. Чернышов, email: Cherntol19@yandex.ru [1]

[1] ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия» (г. Воронеж)

Аннотация. *В работе рассматривается подходы к решению задач распределения ресурсов на сетях путем построения дерева задач и с учетом функции взаимодействия ресурсов. Предложенные целевые функции распределения ресурсов позволяют осуществлять оперативное управление проектами.*

Ключевые слова: *распределение ресурсов, взаимодействие, проект, работа.*

Введение

Задачи распределения ресурсов являются одними из наиболее распространенных задач управления проектами. Под ресурсами понимаются трудовые ресурсы, технические и материальные средства, финансы и т.п. Распределительные задачи позволяют найти такое распределение ресурсов по выполняемым работам, при котором выбранный критерий достигает своего экстремального значения. Класс распределительных задач объединяет задачи, отличающиеся видом целевой функции (ЦФ) и ограничений, количеством ограничений и другими характеристиками. Выбор состава распределяемых ресурсов, реализующих набор алгоритмов (работ), является одной из наиболее сложных задач в проектировании систем управления. При этом распределение ограниченных ресурсов и планирование работ представляют два связанных аспекта этой задачи.

Описание процесса функционирования проекта осуществляется посредством формирования его модели. На сегодняшний день при моделировании процесса управления проектами не принимается во внимание тот фактор, что сетевая модель (СМ) такой системы является по сути функцией распределения трудовых ресурсов. При этом основной задачей является как не только составление оперативного календарного плана при управлении распределением ресурсов во времени, но и возможность его контроля [1].

---

1. Постановка задачи

Проектами будем называть процессы изменений, то есть неповторяющиеся процессы, требующие для своей реализации специальных методов управления [1]. Время выполнения проекта при этом должно быть минимальным и обеспечить более быстрое завершение всех задач. Это обуславливается перераспределением ресурсов в ходе проекта и соответствующими ограничениями (техническими, организационными и ресурсными) накладываемыми на данные операции. Будем считать, что проекты могут содержать такие типы работ, от которых зависит время завершения проектов и их ход реализации. Каждая работа проекта характеризуется видом ресурса, которым она может быть выполнена в заданные сроки, а также производительностью исполнителей.

Введем условные обозначения исходных данных, независимых и зависимых переменных. Пусть проект N состоит из набора работ, технологическая зависимость между которыми задается в виде сети; на реализацию проекта выделены различные виды ресурсов S; R – множество работ проекта, которые определяются заранее заданным списком; P – множество исполнителей; p_j – множество исполнителей, одновременно выполняющих j-ю работу, $p_j \in P$; $M_j^{\max}$ – максимально возможное число составляющих единиц ресурса для выполнения j-й работы, $j \in R$; Q_j –производительность исполнителя, задействованного для выполнения j-й работы; $t_j^{\max}$ и $t_j^{\min}$ – максимально и минимально допустимые моменты времени соответствующие началу выполнения j-й работы соответственно; t_0 и t – моменты времени, соответствующий начальному и конечному состоянию проекта соответственно; c_{ij} – затраты ресурсом i на работу j (весовой коэффициент j-ой работы); b_i – число единиц ресурса i-го вида, $i = \overline{1, S}$; $w_{ij}^{\max}(t)$ и $w_{ij}^{\min}(t)$ – максимально и минимальная допустимые интенсивности выполнения работ проекта соответственно.

Система функционирует в реальном времени и ее состояние в каждый момент времени будет определяться набором числовых параметров $x_{ij}(t)$, p_j, $p_j \in P$, $i \in S$, $j \in R$. Примем следующие ограничения: длительность работ и интенсивность их выполнения ограничена; работы могут выполняться одним видом ресурсов; перевод ресурсов с завершенной работы на следующую не связан с затратой времени; в каждый момент времени суммарное количество используемого ресурса не превышает количества располагаемого системой этого ресурса.

Имея описания всех работ проекта, на первом этапе решается задача распределения ограниченных ресурсов по зависимым операциям. Рассматриваемый подход решения задачи обусловлен тем, что все работы начинаются одновременно и при окончании любой работы ресурсы будут перераспределяться на такие работы, которые по своей продолжительности максимальны по отношению к другим. При этом все работы выполняются в определенной последовательности. На втором этапе решаются задачи распределения ресурсов по каждому проекту отдельно. Зависимости между работами отображаются в виде СМ. Требуется определить СМ (экстремальный граф), определяемую оптимальным распределением ресурсов. При этом следует распределить ресурсы так, чтобы проект был завершен за минимальное время и были точно и в срок выполнены поставленные задачи.

2. Построение дерева задач

Рассмотрим подход к решению задачи распределения ограниченных ресурсов путем построения дерева задач [2].

Процесс распределения ресурсов можно смоделировать сетевым графом $G = (V, A)$, где V – множество вершин графа, формирующих множество событий S (моменты окончания одной или нескольких работ) проекта; A – множество дуг, соответствующих операциям (работам R, обеспечивающих выполнение всех задач); $A \subseteq V^2$. Переходы между работами определяют события проекта. Проведя декомпозицию работ, получим дерево D^N задач, описывающее структуру проекта N, в корне которого – проект в целом. Место некоторой операции в дереве D^N задачи распределения ресурсов определяется номером уровня декомпозиции, который обозначим через $u^N = \overline{0, U^N}$. При этом работа, выполняемая в ходе операции будет находиться на уровне, имеющем номер $u^N = 0$. На следующем уровне декомпозиции ($u^N = 1$) размещается множество работ, выполнение которых осуществляется параллельно и обеспечивают достижение общей цели проекта:

$$N = \left\{N_{z1}, z1 = \overline{1, Z1}\right\}, \qquad (1)$$

где $z1$ – номер задачи 1-го уровня иерархии.

На уровне декомпозиции $u^N = 2$ расположены совокупности работ, выполнение которых необходимо для параллельного распределения ресурсов работ 1-го уровня:

$$N_{z1} = \left\{N_{z1, z2_{z1}}, z1 = \overline{1, Z1},\ z2_{z1} = \overline{1, Z2_{z1}}\right\}, \qquad (2)$$

где $z2_{z1}$ – номер задачи уровня 2, обеспечивающей решение задачи с номером $z1$ предыдущего иерархического уровня проекта и т.д.

При построении дерева D^N задачи распределения ресурсов необходимо использовать следующие правила [2]:

работа выполняемая в различных условиях, в дереве D^N должна быть представлена отдельным узлом дерева;

при осуществлении декомпозиции могут быть повторяющиеся узлы;

одна и та же работа может размещаться на разных уровнях декомпозиции, но обязательно в разных ветвях дерева;

необязательна одинаковая глубина декомпозиции по ветвям дерева.

Необходимо отметить, что дерево D^N задачи распределения ресурсов необходимо строить для трудовых ресурсов и материальных ресурсов отдельно, а затем накладывать оба дерева друг на друга. На верхнем уровне решения принимаются на основе показателей руководителем всего проекта, а на нижних уровнях – руководителями подпроектов. Такой подход позволит рассматривать весь проект как одну работу, обладающую стандартным набором атрибутов (время выполнения, привязка к исполнителям, ресурсам и т.д.) с соответствующими ограничениями, что и будет вписываться в систему управления проектами.

3. Распределение ресурсов с учетом экспертных оценок

Каждый проект описывается как операция двумя характеристиками – объемом проекта W и зависимостью скорости реализации проекта от количества ресурсов $x_{ij}(t)$ в момент времени t [3]:

$$w_{ij}(t) = f(x_{ij}(t)), \qquad (3)$$

В случае, когда работа выполняется с переменной интенсивностью, необходимо определять ее объем W_j и зависимость $w = f(x)$ скорости работы от количества задействованных ресурсов. Задавая моменты времени $t_j^{нач}$ и $t_j^{кон}$ – начала и окончания j-й работы соответственно, W_j определяется как:

$$W_j = \int\limits_{t_j^{нач}}^{t_j^{кон}} f[x_{ij}(t)]\,dt \ . \qquad (4)$$

Для зависимости скорости операции от количества ресурсов типично, что с ростом их количества, средняя производительность растет, а затем она начинает падать.

Производительность исполнителя при выполнении j-й работы, объемом W_j будет определяться отношением:

$$Q_j = \frac{W_j}{\tau_j} \, . \qquad (5)$$

где $\tau_j = t_j^{кон} - t_j^{нач}$ – затраченное время на выполнение j-й работы.

В свою очередь τ_j определяется как:

$$\tau_j = y_{ij} f(b_i, W_j) \, . \qquad (6)$$

где y_{ij} – коэффициент взаимодействия, определяющий влияние количества исполнителей и их профессиональных качеств в ходе операции на суммарную производительность.

Указанный коэффициент определяется выражением [3]:

$$y_{ij} = \psi(n) \, . \qquad (7)$$

где $\psi(n)$ – задается на уровне экспертной оценки, вид зависимости определяется из практики; $n = \left| B_j \right|$, B_j – множество исполнителей, одновременно выполняющих j-ю работу, $B_j \in B$.

Зависимости $f(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ задаются на уровне экспертной оценки процессе проекта в результате накопления статистических данных и коррекции зависимостей в соответствии с имеющейся статистикой. Тем самым будет реализовываться оперативное управление проектом.

Рассмотрим ограничения на ресурсы:

$$F(t) = \sum_{k=t_0}^{t} \sum_{i=1}^{S} c_{ij} \cdot x_{ij}(t) / Q_j \, , \quad \forall k \in [t_0, t]; \qquad (8)$$

$$t_j^{\min} \le t_j^{кон} - t_j^{нач} \le t_j^{\max} \qquad (9)$$

где $t_j^{нач}, t_j^{кон} \ge 0$, $j \in R$;

$$w_{ij}^{\min} \le w_{ij}(t) \le w_{ij}^{\max}, \; t \in [t_j^{нач}; t_j^{кон}], \; i \in S, \; j \in R; \tag{10}$$

$$\int_{t_j^{нач}}^{t_j^{кон}} w_{ij}(t)dt = W_j, \; i \in S, \; j \in R; \tag{11}$$

$$1 \le x_{ij}(t) \le M_j^{\max}, \tag{12}$$

где $x_{ij}(t)$ – целое, $i \in S$, $j \in R$.

$$\sum_{j \in R} x_{ij}(t) \le b_i, \; k \in [t_0, t], \; i = \overline{1, S}. \tag{13}$$

Условие (8) – ЦФ, требующая максимизации для получения максимального эффекта при оптимальном распределении ресурсов. Условия (9)–(11), (12), (13) – технические и организационные ограничения. Любое решение, удовлетворяющее условиям (8)–(13), является допустимым для выбранной модели.

Рассмотрим ЦФ (8). Подставляя в (8) выражения (4) – (7) получим:

$$F(t) = \sum_{k=t_0}^{t} \sum_{i=1}^{S} \frac{c_{ij} \cdot x_{ij}(t) \cdot \psi(n) \cdot f(b_i, W_j)}{\int_{t_j^{нач}}^{t_j^{кон}} f\left[x_{ij}(t)\right]dt}. \tag{14}$$

Начальное состояние системы $F(t_0) = 0$. Построим вектор-строку возможных приращений Δ_j ЦФ $F(t)$, при условии, что выполнение работ множества A_σ назначается одна единица ресурса i, и определим ее максимальное приращение $\Delta_{\max}$:

$$\Delta_j = f(x_{ij\sigma} + 1) - f(x_{ij\sigma}) = \frac{c_{ij} x_{ij\sigma}}{Q_j} + \frac{c_{ij}}{Q_j} - \frac{c_{ij} x_{ij\sigma}}{Q_j} = \frac{c_{ij}}{Q_j}, \tag{15}$$

где $f(0) = 0$, а максимальное приращение ЦФ (8):

$$\Delta_{\max} = \max_j \Delta_j, \; \Delta_j \in A_\sigma, \; \Delta_{\max} \ne 0. \tag{16}$$

Для построения СМ, определяется множество работ $R1$, включенных в ресурсный граф и множество работ R_σ, свободных от технологических условий ($R_\sigma \ne \emptyset$, $\sigma = 1,2,\ldots$). В начальный момент времени, $x_{ij\sigma} = 0$ и $\sigma = 1$. Определив приращение ЦФ, осуществляется назначение ресурсов на j-ю работу и производится проверка исчерпаемости свободных ресурсов в системе [4]. Для того чтобы распределение ресурсов в каждый момент времени t_σ, $\sigma = 1,2\dots$, было оптимальным, необходимо учитывать изменения состояния в системе в связи с окончанием определенного ряда работ, ставших свободными от технологических условий. В момент времени t_σ в распределении будут участвовать все ресурсы, на которые назначены работы. Выделяя и определяя из множества $J1_\sigma$ подмножество предшествующих работ, обеспеченных ресурсами, но окончание которых еще не наступило, вычисляется продолжительность их выполнения, сроки их завершения и перераспределяют ресурсы на более трудоемкие работы. Множество работ, каждую из которых на шаге σ можно определить и включить в ресурсный граф – нумеруется, причем части работ, на каждой из которых число ресурсов постоянно, рассматривают как самостоятельные работы [1].

Заключение

Таким образом, представленные в работе подходы позволяют получить решение задачи оперативного управления распределением ресурсов на сетях и найдут применение при планировании, составлении расписаний, организации ремонта, сервисного обслуживания и в других распределительных задачах.

Список литературы

1. Коновалов, О. А. Методы и модели оперативного управления распределением ресурсов : монография / О.А. Коновалов, Е.В. Коновальчук. – Германия: Palmirium Academic Publishing, 2019, 177 с.
2. Прилуцкий, М. Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах / М. Х. Прилуцкий, Л. Г. Афраймович // Автоматоматика и телемеханика. – 2006. –№6. – С. 194–205.
3. Заболотский, В. П. Математические модели в управлении: учеб. пособие / В. П. Заболотский. – СПб. : СПбГАУП., 2001. – 196 с.
4. Карманов, В. Г. Математическое программирование: учеб. пособие / В. Г. Карманов. – 5-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.